《离散数学》作业 1
命题逻辑

Problem 1

试用真值表验证德 · 摩根第二定律 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$。

p	q	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

$\neg(p\vee q)$ 与 $\neg p\wedge\neg q$ 具有相同的真值表，故得证.

Problem 2

判断下列这些条件语句是真是假：

a) $2+\overset{p}{2}=5$ 当且仅当 $1+\overset{q}{1}=3$。

b) 如果 $1+\overset{p}{1}=2$，则 $2+\overset{q}{2}=5$。

c) 如果 $1+\overset{p}{1}=3$，则 $2+\overset{q}{2}=5$。

d) 如果 $\overset{p}{0>1}$，则 $\overset{q}{2>1}$。

a) 由

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1

，故真

c) 由

p	q	$p\to q$
0	0	1

，故真.

b) 由

p	q	$p\to q$
1	0	0

，故假

d) 由

p	q	$p\to q$
0	1	1

，故真.

Problem 3

只有当你已经完成了专业要求（r），没有欠大学的钱（$\neg m$），也没有图书馆的过期图书未还时（$\neg b$），你才能从大学毕业。试用命题：g："你可以从大学毕业"，m："你欠大学的钱"，r："你已经完成了你的专业要求"，b："你有过期的图书馆图书未还"来表达前述复合命题。

$$g \to r \wedge (\neg m) \wedge (\neg b)$$

Problem 4

证明 $\neg p \to (q \to r)$ 和 $q \to (p \vee r)$ 逻辑等价。

* 先证明 $\neg p\vee q \equiv p\to q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$p\to q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

故 $\neg p\vee q \equiv p\to q$

由 $\neg p\vee q \equiv p\to q$，有

$\neg p\to(q\to r)$

$\equiv \neg p\to(\neg q\vee r)$

$\equiv \neg(\neg p)\vee(\neg q\vee r)$

$\equiv p\vee(\neg q\vee r)$

$q\to(p\vee r)$

$\equiv \neg q\vee(p\vee r)$

$\equiv p\vee(\neg q\vee r)$

故两者等价.

Problem 5

证明 $p \to (q \to r)$ 和 $p \wedge q \to r$ 逻辑等价。

由 $\neg p\vee q \equiv p\to q$，有

$p\to(q\to r)$

$\equiv p\to(\neg q\vee r)$

$\equiv \neg p\vee(\neg q\vee r)$

$p\wedge q\to r$

$\equiv \neg(p\wedge q)\vee r$

$\equiv \neg p\vee(\neg q\vee r)$

故两者等价.

Problem 6

证明 $(p \to q) \to (r \to s)$ 和 $(p \to r) \to (q \to s)$ 不是逻辑等价。

由 $p\to q \equiv \neg p \vee q$.

有 $(p\to q)\to(r\to s)$

$\equiv \neg(\neg p\vee q)\vee(\neg r\vee s)$

$\equiv p\wedge\neg q\vee\neg r\vee s$

$\equiv ((p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r))\vee s$

同理, $(p\to r)\to(q\to s)$

$\equiv((p\vee\neg q)\wedge(\neg r\vee\neg q))\vee s$

只需验证一组取值使二者真值不同即可.

取 $s=0$. 有 $((p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r))$

与 $((p\vee\neg q)\wedge(\neg r\vee\neg q))$ 一真一假

故 $\neg q\vee\neg r$ 为真 即 q 与 r 至少有一个为假

若取 $r=0$. 则 $q=1$, $p=0$, 此时左式 $=1$ 而右式 $=0$, 二者不等

故两原命题不是逻辑等价.

Problem 7

判断 $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$ 是否为永真式。

p	q	$\neg p$	$p\to q$	$\neg p\wedge(p\to q)$	$\neg q$	$(\neg p\wedge(p\to q))\to\neg q$
0	1	1	1	1	0	0

故不是永真式.

Problem 8

证明 $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ 是永真式。

$(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r) \equiv \neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$

$\equiv \neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee r)\vee(\neg p\vee r)$

$\equiv (p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r)\vee\neg p\vee r$

当 r 真 或 p 假时, 命题为真

当 r 假且 p 真时, q 无论真假, 命题均为真.

故是永真式.

Problem 9

甲说：我会游泳。

乙说：甲不会游泳。

丙说：乙不会游泳。

丁说：我们有三个人会游泳。

以上只有一个人说假话，那么究竟谁说真话，谁说假话？谁会游泳，谁不会游泳？

请分别用自然语言表达的日常推理和命题逻辑表达的形式推理解决该问题。

<自然语言> 若甲说假话, 则甲不会游泳, 乙说真话; 丙说真话, 则乙不会游泳, 丁说真话, 但与甲、乙均不会游泳矛盾;

若乙说假话, 则甲会游泳, 甲说真话; 丙说真话, 乙不会游泳, 丁说真话, 丙, 丁会游泳, 符合情况;

若丙/丁说假话, 则甲乙矛盾, 必有一假, 不符情况;

<命题逻辑>

	甲	乙	丁	丙
说真话	p	$\neg p$	r	s
会游泳	p'	q'	r'	s'

由只有一人说假话, 有 $(p\wedge r\wedge s)\vee(\neg p\wedge r\wedge s)\equiv 1$, 故 $r\wedge s\equiv 1$

$r=1, s=1$.

由题: $p\to p'$ $s\to p'\wedge q'\wedge r'\wedge s'\equiv 0$

$r\to\neg q'$ $s\to(p'\wedge q'\wedge r')\vee(p'\wedge q'\wedge s')\vee(q'\wedge r'\wedge s')\vee(p'\wedge r'\wedge s')\equiv 1$

又 $r=1, s=1$. $q'=0$, $p'=1$, $r'=1$, $s'=1$.

故 $p=1, r=1, s=1$; $q'=0, p'=1, r'=1, s'=1$

Problem 10

给出下列事实及定义:

1. 假设给定一个有 n 个命题变元的真值表，那么可通过下面的方法构造一个与此表一致的复合命题：取各命题变元或其否定的合取式的析取式，其中的每个合取式对应一组真值组合，从而使得该复合命题为真。这样得到的复合命题称为**析取范式**。

2. 一组逻辑运算符称为是**功能完备的**，如果每个复合命题都逻辑等价于一个只含这些逻辑运算符的复合命题。

请证明:

a) ¬、∧ 和 ∨ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。

b) ¬、∧ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。

c) ¬、∨ 构成一个逻辑运算符的功能完备集。

a) 只需证 $p\to q$ 与 $p\leftrightarrow q$ 可以用 ¬、∧、∨ 表示.

p	q	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$p\to q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

故 $\neg p\vee q\equiv p\to q$

$p\to q$ 可用 ¬、∧、∨ 表示

而 $p\leftrightarrow q \equiv (p\to q)\wedge(q\to p)$

$\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$.

故 $p\leftrightarrow q$ 可用 ¬、∧、∨ 表示

即原命题得证.

b) 在 a) 基础上，只需证明 $\vee$ 可以用 $\neg$、$\wedge$ 表示.

p	q	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

故 $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$，原命题得证

要推广到 $(p \vee q \cdots \vee r \vee s)$.

c) 在 a) 基础上，只需证明 $\wedge$ 可以用 $\neg$、$\vee$ 表示.

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$p \wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

故 $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$，原命题得证

Problem 11

证明：如果 p、q 和 r 是复合命题，且 p 与 q 是逻辑等价的，q 与 r 是逻辑等价的，则 p 与 r 是逻辑等价的。

即证：$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \to (p \leftrightarrow r) \equiv 1$.

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \to (p \leftrightarrow r)$$
$$\equiv \big((p \to q) \wedge (q \to p) \wedge (q \to r) \wedge (r \to q)\big) \to (p \leftrightarrow r)$$
$$\equiv \big((p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to q) \wedge (q \to p)\big) \to (p \leftrightarrow r)$$
$$\equiv \big((p \to r) \wedge (r \to p)\big) \to (p \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow r) \to (p \leftrightarrow r)$$

永真，故得证

Problem 12

试判断下列复合命题是否是可满足的。

$p=1$或$q=0$　　$p=0$或$q=1$　　$p=0$或$q=0$.

a) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$

a) 条件：

	p	q
$p \vee \neg q$	1	0
$\neg p \vee q$	0	1
$\neg p \vee \neg q$	0	0

当 $p=0$, $q=0$ 时，可满足

b) 条件：

序号	p	q	r	s
①	0	0	1	
②	0	1		0
③	1	0		0
④		0	0	0
⑤	1	1	0	
⑥	1		0	0

当

p	q	r	s
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

，可满足

c) 条件：

序号	p	q	r	s
①	1	1	1	
②	1	0		0
③		1	0	1
④	0		1	1
⑤	0	1		0
⑥	1	0	0	
⑦	0	0		1
⑧	0		0	0

当

p	q	r	s
1	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1

，可满足

《离散数学》作业 2

80′ $E(x)=83$

谓词逻辑初步

Problem 1

令 $C(x)$ 为语句 "x 有一只猫作为宠物"，$D(x)$ 为语句 "x 有一只狗作为宠物"，$F(x)$ 为语句 "x 有一只雪貂作为宠物"。用 $C(x)$、$D(x)$、$F(x)$、量词和逻辑联结词表达下列语句。令论域为你班上的所有学生。

a) 班上的一个学生有一只猫和一只狗和一只雪貂。

b) 班上的所有学生有一只猫或一只狗或一只雪貂。

c) 班上的一些学生有一只猫和一只雪貂，但没有狗。

d) 班上没有学生同时有一只猫和一只狗和一只雪貂。

e) 对猫、狗和雪貂这三种动物的任意一种，班上都有学生将其作为宠物。

a) $\exists x(C(x)\wedge D(x)\wedge F(x))$

b) $\forall x(C(x)\vee D(x)\vee F(x))$

c) $\exists x(C(x)\wedge \neg D(x)\wedge F(x))$

d) $\neg\exists x(C(x)\wedge D(x)\wedge F(x)) \equiv \forall x(\neg C(x)\vee\neg D(x)\vee\neg F(x))$

e) $\exists x(C(x))\wedge\exists x(D(x))\wedge\exists x(F(x))$.

$\equiv \exists x(C(x))\wedge\exists y(D(y))\wedge\exists z(F(z))$ 重命名.

Problem 2

如果每个变量的论域都为实数集合，判断下列各语句的真值。

a) $\exists x(x^2=2)$

b) $\exists x(x^2=-1)$

c) $\forall x(x^2+2\geq 1)$

d) $\forall x(x^2\neq x)$

a) 取 $x=\sqrt{2}$ 成立，由存在生成，成立

b) 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $x^2\geq 0$，由存在生成，不成立

c) 对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $x^2\geq 0$，故 $x^2+2\geq 1$，由全称生成，成立

d) 取 $x=1$，有 $x^2=x$，由全称例示，不成立.

Problem 3

证明下列逻辑等价式，其中 x 在 A 中不作为自由变元出现。假设论域非空。

不会.

a) $(\forall xP(x))\vee A\equiv\forall x(P(x)\vee A)$

$\forall xP(x)\vee A$

$\equiv(\forall xP(x))\vee\exists x(A)$

$\equiv\forall x(\exists xP(x)\vee A)$

$\equiv\forall x(P(x)\vee A)$

若 A 为真，$(\forall xP(x))\vee A$ 真 $\equiv$ $\forall x(P(x)\vee A)$ 真

若 A 为假，$(\forall xP(x))\vee A$ 真/假 $\forall xP(x)$ 真/假 $\forall x(P(x)\vee A)$ 为真/假.

b) $(\exists xP(x))\vee A\equiv\exists x(P(x)\vee A)$

$(\exists xP(x))\vee A$

$\equiv(\exists xP(x))\vee\exists xA$

$\equiv\exists x(P(x)\vee A)$

同左.

对 A 分类讨论

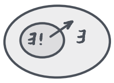
Problem 4

下列语句的真值是什么？ ∃! 表示"存在唯一"

a) $\exists\,!xP(x) \rightarrow \exists\, xP(x)$

b) $\forall\, xP(x) \rightarrow \exists\,!xP(x)$

c) $\exists\,!x\neg P(x) \rightarrow \neg\forall\, xP(x)$

a) 

真 （小范围 → 大范围为真）

b) 

假. （论域只含一个元素时为真）.

c) 

真

Problem 5

离散数学班上有 1 个数学专业的新生，12 个数学专业的二年级学生，15 个计算机科学专业的二年级学生，2 个数学专业的三年级学生，2 个计算机科学专业的三年级学生，和 1 个计算机科学专业的四年级学生。用量词表达下列语句，再给出其真值。

a) 班上有一个三年级学生。

b) 班上每个学生都是计算机科学专业的。

c) 班上有个学生既不是数学专业的，也不是三年级学生。

d) 班上每个学生要么是二年级学生，要么是计算机科学专业的。

e) 存在这样一个专业使得该班级有这个专业每一个年级的学生。

设 x是数学专业的学生为 $A(x)$. x 是计算机科学专业的学生为 $B(x)$.
x是一、二、三、四年级学生分别为 $C(x)$、$D(x)$、$E(x)$、$F(x)$.
论域为离散数学班上的学生.

a). $\exists x(E(x))$. 真 （若表示为 $\exists!x(E(x))$ 则为假）.

b) $\forall x(B(x))$ 假

c) $\exists x(\neg A(x) \wedge \neg E(x))$ 真

d) $\forall x(D(x) \vee B(x))$ 假

e) $\exists x\Big((A(x) \vee B(x)) \wedge (C(x) \wedge D(x) \wedge E(x) \wedge F(x))\Big)$

Problem 6

使用谓语、量词、逻辑联结词和数学运算符表达语句“有一个正整数不是三个整数的平方和”。

$\exists x \underline{\forall abc}(x \neq a^2+b^2+c^2)$, $x \in \mathbb{N}^*; a,b,c \in \mathbb{Z}$

$\exists x \forall a \forall b \forall c\ ((x>0) \land x \neq a^2+b^2+c^2)$. 域: $\mathbb{Z}$.

Problem 7

假定命题函数 $P(x,y)$ 的论域由 x 和 y 的序偶组成, 其中 x 是 1、2 或 3, y 是 1、2 或 3。用析取式和合取式写出下列命题。

a) $\forall x \forall y\ P(x,y)$

b) $\forall y \exists x\ P(x,y)$

a) $P(1,1) \land P(1,2) \land P(1,3) \land P(2,1) \land P(2,2) \land P(2,3) \land P(3,1) \land P(3,2) \land P(3,3)$;

b) $(P(1,1) \lor P(2,1) \lor P(3,1)) \land (P(1,2) \lor P(2,2) \lor P(3,2)) \land (P(1,3) \lor P(2,3) \lor P(3,3))$.

Problem 8

将下列逻辑式转化为前束范式。

a) $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \lor A$, 其中 A 是不涉及任何变量的命题。

b) $\neg(\forall x P(x) \lor \forall x Q(x))$

c) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

a) $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \lor A \equiv \exists x \exists y (P(x) \lor Q(y) \lor A)$ 重命名

b) $\neg(\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)) \equiv \exists x \neg P(x) \land \exists x \neg Q(x) \equiv \exists x \exists y (\neg P(x) \land \neg Q(y))$ 否定内移、重命名

c) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \equiv \neg \exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg P(x) \lor \exists x Q(x) \cancel{\equiv} \forall x (\neg P(x) \lor Q(x))$. 转化、否定内移、合并.

$\equiv \forall x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y)) \equiv \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y))$

重命名.

Problem 9

找出变元 x、y 和 z 的一个公共论域, 使语句 $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ 为真, 再找出另外一个论域使其为假。

真: $x,y,z \in \{0,1\}$.

假: $x,y,z \in \{1,2,3\}$

Problem 10

证明两个语句 $\neg\exists x\forall y P(x,y)$ 和 $\forall x\exists y\neg P(x,y)$ 是逻辑等价的, 这里两个 $P(x,y)$ 第一个变元的量词具有相同的论域, 两个 $P(x,y)$ 第二个变元的量词也具有相同的论域。

$\neg\exists x\forall y P(x,y)$.

$\equiv \forall x\neg(\forall y P(x,y))$

$\equiv \forall x\exists y\neg P(x,y)$.

Problem 11

用推理规则证明：如果 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ 和 $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ 为真，则 $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ 为真。

$\forall x(P(x)\wedge R(x)) \rightarrow \forall x P(x),\ \forall x R(x)$.

$\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\wedge S(x))) \equiv \forall x(\neg P(x)\vee(Q(x)\wedge S(x)))$

$\equiv \forall x((\neg P(x)\vee Q(x))\wedge(\neg P(x)\vee S(x)))$

$\equiv \forall x(\neg P(x)\vee Q(x)) \wedge \forall x(\neg P(x)\vee S(x))$

又 $\forall x P(x)$. 故 $\forall x\, Q(x)$. $\forall x\, S(x)$.

故 $\forall x(\overset{R}{\cancel{Q}}(x)\wedge S(x))$.

Problem 12

用推理规则证明: 如果 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 和 $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$, $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ 和 $\exists x\neg P(x)$ 为真, 则 $\exists x\neg R(x)$ 为真。

由 $\forall x(P(x)\vee Q(x))$, $\exists x\neg P(x)$,

有 $\forall x\, Q(x)$.

由 $\forall x\, Q(x)$、$\forall x(\neg Q(x)\vee S(x))$

有 $\forall x\, S(x)$.

$\forall x(R(x)\rightarrow\neg S(x)) \equiv \forall x(\neg R(x)\vee\neg S(x))$

由 $\forall x\, S(x)$.

有 $\forall x\neg R(x) \rightarrow \exists x\neg R(x)$.

$\exists x\neg P(x)$. $\underline{\neg P(a)}$.

$\left.\begin{array}{l}\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow P(a)\vee Q(a).\end{array}\right\} \Rightarrow Q(a).$

$\forall x(\neg Q(x)\vee S(x)) \Rightarrow \neg Q(a)\vee S(a).$

$\} \Rightarrow S(a)$

$\forall x(R(x)\rightarrow\neg S(x)) \equiv \forall x(\neg R(x)\vee\neg S(x))$

$\Rightarrow \neg R(a)\vee\neg S(a) \Rightarrow \neg R(a). \Rightarrow \exists x\neg R(x).$

Problem 13

证明三角不等式: 如果 x 和 y 都是实数, 则 $|x| + |y| \geq |x+y|$。

由 $ab \le |ab|$.

有 $2ab \le 2|ab|$

有 $a^2+2ab+b^2 \le a^2+2|ab|+b^2$

即 $(a+b)^2 \le (|a|+|b|)^2$

故 $|a+b| \le |a|+|b|$.

Problem 14

证明方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有无穷多个正整数解 x, y, z（提示: 令 $x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2, m, n$ 为整数）。

令 $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$. $m>n$ 且 $mn>0$, $m、n \in \mathbb{Z}$.

代入方程,有 $m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4$ 为恒等式.

而存在无穷多组 $m、n$ 使得 $x、y、z$ 为正整数.

故方程 $x^2+y^2+z^2$ 有无穷多个正整数解.

离散数学-第三次作业

证明方法

Problem 1

试符号化以下各命题，并根据前提推证结论是否有效。

前提：(1) “有的病人喜欢所有的医生。”

(2) “没有一个病人喜欢庸医。”

结论：“没有医生是庸医。”

设 $P(x)$：x是病人　$Q(x)$：x是医生

$R(x)$：x是庸医　$S(x,y)$：x喜欢y

(1) $\exists x(P(x)\land\forall y(Q(y)\to S(x,y)))$

(2) $\forall x(P(x)\to(\forall y(S(x,y)\to\neg R(y))))$

$\Rightarrow \forall y(Q(y)\to\neg R(y))$

由(1) $\exists x(P(x)\land\forall y(Q(y)\to S(x,y)))$

$P(a)\land\forall y(Q(y)\to S(x,y))$

由(2) $\forall x P(x)\to\forall y(S(x,y)\to\neg R(y)))$

$P(a)\to\forall y(S(x,y)\to\neg R(y)))$

由$P(a)$. $\forall y(S(a,y)\to\neg R(y))$

故 $S(a,y)\to\neg R(y)$.

$\forall y(Q(y)\to S(a,y))$.

故 $Q(y)\to\neg R(y)$.

即 $\forall y(Q(y)\to\neg R(y))$.

Problem 2

请运用命题逻辑进行表示，并证明下列推理。（1）“今天海面不平稳并且紫外线不强”，（2）“若今天海面不平稳或紫外线很强，则探险队不出海”，（3）“若探险队不出海，则探险队将修理船只”，（4）“若探险队修理船只，则探险队在晚上发布行程记录”，证明结论 “探险队在晚上发布行程记录”。

设 $P(x)$：海面平稳．$Q(x)$：紫外线强　$R(x)$：出海　$S(x)$：修理船只　$T(x)$：发布行程记录.

(1) $\neg P(x)\land\neg Q(x)$.　(2) $\neg P(x)\lor Q(x)\to\neg R(x)$　(3) $\neg R(x)\to S(x)$　(4) $S(x)\to T(x)$.

由 $\neg P(x)\land\neg Q(x)$．有 $\neg P(x)$.

由 $\neg P(x)\lor Q(x)\to\neg R(x)$. 有$\neg R(x)$.

由 $\neg R(x)\to S(x)$　有 $S(x)$.

由 $S(x)\to T(x)$，有 $T(x)$.

Problem 3

证明所有正整数 $n = 4m + 3$（m 为自然数）都不能写成两个整数的平方和。

假设存在 $m_0\in\mathbb{N}^*$ 使得 $n=4m_0+3$ 能写成两个整数平方和.

设 $n=a^2+b^2$,

有 $n=a^2+b^2=4m_0+3$. 为奇数.

故 a,b一奇一偶.　设 $a=2u+1, b=2v$　$u,v\in\mathbb{Z}$.

$n=(2u+1)^2+v^2$

$=4(u^2+v^2+u)+1=4q+1$　$q\in\mathbb{Z}$.

$\therefore 4m_0+3=4q+1$

$\Rightarrow 2(m_0-q)=-1$　与 m_0、$q\in\mathbb{Z}$ 矛盾

故假设不成立，原命题成立

Problem 4

证明方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有无穷多个正整数解 x,y,z。

令 $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$.　$m>n$ 且 $mn>0$, $m,n\in\mathbb{Z}$.

代入方程，有　$m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4$ 为恒等式.

而存在无穷多组 m、n 使得 x,y,z为正整数.

故 方程 $x^2+y^2=z^2$ 有无穷多个正整数解.

Problem 5

两个实数 x 和 y 的平方均值是 $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

猜想：$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}$.

证明如下：由 $(x-y)^2 \geqslant 0$

有 $x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$

$2(x^2+y^2) \geqslant x^2+y^2+2xy$

$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \frac{(x+y)^2}{4}$

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}$.

Problem 6

在黑板上写下数字 1，2，3 ... $2n$, 其中 n 是奇数。从中任意挑出两个数 j 和 k，在黑板上写下 $|j-k|$ 并擦掉 j 和 k。继续这个过程，直到黑板上只剩下一个整数为止。证明这个整数必为奇数。

对 j,k 操作一次，黑板上数字之和减少量

$\Delta\Sigma = (j+k) - |j-k| = 2\min\{a,b\}$.

是一个偶数.

因此每次操作减少了一个偶数.

由于开始时 n 是奇数，$\Sigma = n(2n+1)$ 为奇数.

故终止时 Σ' 为奇数，即最后一个数为奇数.

Problem 7

有一个 $n*n$ 的方格表，先允许从中任意选择 $n-1$ 个方格涂为黑色，然后再逐步地将那些至少与两个已涂黑的方格相邻的方格也涂为黑色。证明，不论怎样选择最初的 $n-1$ 个格，都不能按这样的法则涂黑所有的方格。

涂色时不变的是黑色部分总周长.

开始任选 $n-1$ 个涂黑，其周长最多为 $4(n-1)$

若要涂黑的方格旁有 k 个黑色格，$k \geqslant 2$.

则周长减少 k，增加 $4-k$. 又 $k \geqslant 2$.

则 $k \geqslant 4-k$. 周长不会增加.

若要涂满，则周长为 $4n$.

而 $4(n-1) < 4n$.

故不能涂满.

Problem 8

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数。

设 $a \in \mathbb{Q}$，$b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

a,b 中间的一个数 $\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

$\because a \in \mathbb{Q}$ $\therefore \frac{a}{2} \in \mathbb{Q}$.

$\because b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\therefore \frac{b}{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$\because$ 有理数 + 无理数 = 无理数.

故 $\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

原命题得证.

Problem 9

证明三角不等式：假设 x, y 都是实数，则 $|x| + |y| \geq |x + y|$。

由 $ab \leq |ab|$.

有 $2ab \leq 2|ab|$

有 $a^2+2ab+b^2 \leq a^2+2|ab|+b^2$

即 $(a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2$

故 $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Problem 10

证明 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。

假设 $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$.

有 $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$. $p, q \in \mathbb{Z}$. 且 p, q 互质,

有 $2 = \frac{p^3}{q^3} \Rightarrow 2q^3 = p^3$.

由 p, q 互质, p^3 与 q^3 互质

与 $2q^3 = p^3$ 矛盾. 故假设不成立.

故原命题成立.

Problem 11

使用分情形证明法来证明当 a, b 和 c 都是实数时就有 $\min(a, \min(b, c)) = \min(\min(a, b), c)$。

1° $a<b<c$ $\min\{a, \min\{b,c\}\} = \min\{a, b\} = a$ $\min\{\min\{a,b\}, c\} = \min\{a, c\} = a$. 成立.

2° $a<c<b$ $\min\{a, \min\{b,c\}\} = \min\{a, c\} = a$ $\min\{\min\{a,b\}, c\} = \min\{a, c\} = a$. 成立.

3° $b<a<c$ $\min\{a, \min\{b,c\}\} = \min\{a, b\} = b$ $\min\{\min\{a,b\}, c\} = \min\{b, c\} = b$ 成立.

4° $b<c<a$ $\min\{a, \min\{b,c\}\} = \min\{a, b\} = b$ $\min\{\min\{a,b\}, c\} = \min\{b, c\} = b$ 成立.

5° $c<a<b$ $\min\{a, \min\{b,c\}\} = \min\{a, c\} = c$ $\min\{\min\{a,b\}, c\} = \min\{a, c\} = c$ 成立.

6° $c<b<a$ $\min\{a, \min\{b,c\}\} = \min\{a, c\} = c$ $\min\{\min\{a,b\}, c\} = \min\{b, c\} = c$ 成立.

Problem 12

a) 证明或驳斥: 如果 a 和 b 是有理数，那么 a^b 一定也是有理数。

b) 是否存在 a 和 b 是无理数，使得 a^b 是有理数。

a) 当 $a=2, b=\frac{1}{2}$ 时, $a^b = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 是无理数.

b) 存在 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 使得 $a^b \in \mathbb{Q}$.

当 $b^2 = 2$, $a = b^b$ 时, 有 $a^b = (b^b)^b = b^2 = 2$

《离散数学》第四周作业

集合论与数论初步

Problem 1

设 a,b,c 各不相同，判断下列等式中哪个等式为真。

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

g) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

a) $\phi \in \{\phi\} \equiv 0 \in 1$ 成立

b) $\phi \in \{\phi, \{\phi\}\} \equiv 0 \in 2$ 成立

c) $\{\phi\} \notin \{\phi\} \equiv 1 \in 1$ 不成立

d) $\{\phi\} \in \{\{\phi\}\} \equiv 1 \in \{1\}$ 成立

e) $\{\phi\} \subset \{\phi, \{\phi\}\} \equiv 1 \subset 2$ 成立

f) $\{\{\phi\}\} \subset \{\phi, \{\phi\}\} \equiv \{1\} \subset 2$ 成立

g) $\{\{\phi\}\} \subset \{\{\phi\}, \{\phi\}\} \equiv \{1\} \subset \{1\}$ 不成立

Problem 2

判断下列各集合是否为某集合的幂集。

a) $\emptyset$

b) $\{\emptyset, \{a\}\}$

c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

a) $P(\phi) = \{\phi\}$ 不是

b) $P(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$ 是

c) $P(\{\phi, a\}) = \{\{\phi\}, \{a\}, \{\phi, a\}, \phi\}$ 不是

d) $P(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 是

Problem 3

令 A和 B为全集 U的子集。证明 $A\subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B}\subseteq \overline{A}$。

必要性($\Rightarrow$)：假设 $A \subseteq B$. 令 $x \in \overline{B}$.

则 $x \notin B$. $A \subseteq B \equiv \{x \mid x \in A \to x \in B\}$.

故 $x \notin A$

故 $x \in \overline{A}$

故 $x \in \overline{B} \to x \in \overline{A} \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$

充分性($\Leftarrow$)：假设 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

同前，有 $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{\overline{B}}$.

而 $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\overline{B}} = B$

故 $A \subseteq B$.

故 $A \subseteq B \leftrightarrow B \subseteq A$.

Problem 4

令 $A_i = \{..., -2, -1, 0, 1, ..., i\}$，求

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

$A_1 = \{\cdots, -2, -1, 0, 1\}$

$A_2 = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$\cdots$

$A_n = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n\}$

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n\}$.

b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{\cdots, -2, -1, 0, 1\}$.

Problem 5

令 f 为从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = x^2 + 2x$。求

a) $f^{-1}(\{1\})$ b) $f^{-1}(\{x|0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x|x > 3\})$

a) $f^{-1}(\{1\}) \equiv x^2+2x=1$ 故 $x=-1\pm\sqrt{2}$，$x \in \{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\}$

b) $f^{-1}(\{x|0<x<1\}) \equiv 0<x^2+2x<1$ 故 $x \in \{x| -1-\sqrt{2} < x < -2 \vee 0 < x < \sqrt{2}-1\}$

c) $f^{-1}\{x|x>3\} \equiv x^2+2x>3$ 故 $x \in \{x| x<-3 \vee x>1\}$

Problem 6

设 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的解析式为 $f(x, y) = (x + y, x - y)$，试证明：f 是双射。

1) 证明 f 是单射. 令 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

有 $(x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2)$

故 $\begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 \\ x_1-y_1 = x_2-y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

f 是单射.

2) 证明 f 是满射、任取 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. 存在 $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$ 使得

$f(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) = (a,b)$ 故 f 是满射

故 f 是双射.

Problem 7

设 f 是一个从集合 A到集合 B的函数，其中集合 A和集合 B是有限集，且 $|A| = |B|$。证明 f 是单射当且仅当它是满射。[提示：$|A| \geq |f(A)|$]

$\Rightarrow$ (必要性)：若 f 是单射, A 中不同元素像不同

则 $|A| = |B| = |f(A)|$

又 $f(A) \subseteq B$. 故 $|f(A)| = |B|$

故 f 是满射.

$\Leftarrow$ (充分性)：若 f 是满射, 则 $|f(A)| = |B|$.

若 f 不是单射, 则 $f(A) < B$. 与 $|f(A)| = |B|$ 矛盾.

故 f 是单射.

Problem 8

假定 f 是从 X到 Y的函数，g 是从 Y到 X的函数。证明 $f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$ 与 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$ 等价。其中 I_X 和 I_Y 分别是 X 和 Y 上的恒等函数。

$f(g(x)) = I_Y \quad x \in Y$

$f^{-1}(I_Y) = g(x)$

$g(I_Y) = g(x)$

故 $I_Y = x \quad x \in Y$

I_Y是Y上的恒等函数

$g(f(x)) = I_X \quad x \in X$

$g^{-1}(I_X) = f(x)$

$f(I_X) = f(x)$

$I_X = x$，$x \in X$

I_X是X上的恒等函数

Problem 9

二元关系 R^2

设 R_1, R_2 是集合 A 上的关系，试说明：

a) 若 R_1, R_2 满足自反性，则 $R_2 \circ R_1$ 是否满足自反性?

b) 若 R_1, R_2 满足对称性，则 $R_2 \circ R_1$ 是否满足对称性?

c) 若 R_1, R_2 满足传递性，则 $R_2 \circ R_1$ 是否满足传递性?

a) 满足. 对 $\forall x \in A$，因为 R_1, R_2 满足自反性，有 $(x,x) \in R_1$，$(x,x) \in R_2$.
故有 $(x,x) \in R_2 \circ R_1$. 因此 $R_2 \circ R_1$ 满足自反性.

b) 不满足. 取 $A = \{1,2,3\}$ $R_1 = \{(1,2),(2,1)\}$ $R_2 = \{(1,1)\}$. 则 R_1、R_2 满足对称性.
而 $R_2 \circ R_1 = \{(2,1)\}$ 不是对称的.

c) 不满足. 取 $A = \{1,2,3\}$. $R_1 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$. $R_2 = \{(2,3),(3,1),(2,1)\}$. 则 R_1, R_2 满足传递关系.
而 $R_2 \circ R_1 = \{(1,3),(2,1),(2,3)\}$ 不是传递的.

Problem 10

设 f 是从 Y到 Z的可逆函数，g 是从 X到 Y的可逆函数。证明 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$。

证明：$\because$ $f: Y \to Z$，$g: X \to Y$. 且 f^{-1}、g^{-1} 均存在

则 f, g 为双射，$f \circ g$ 也为双射

$f^{-1}: Z \to Y$，$g^{-1}: Y \to X$.

$g^{-1} \circ f^{-1}: Z \to X$.

$\mathrm{dom}(g^{-1} \circ f^{-1}) = \mathrm{dom}(f \circ g)^{-1} = Z$

对于 $\forall z_0 \in Z$，$\exists! y_0 \in Y$. 使得 $f(y_0) = z_0$

$\exists! x_0 \in X$，使得 $g(x_0) = y_0$

故 $(g^{-1} \circ f^{-1})(z_0) = g^{-1}(f^{-1}(z_0)) = g^{-1}(y_0) = x_0$

$(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)) = f(y_0) = z_0$

故 $(f \circ g)^{-1}(z_0) = x_0$.

故对 $\forall z_0 \in Z$，有 $(g^{-1} \circ f^{-1})(z_0) = (f \circ g)^{-1}(z_0) = x_0$.

故有 $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

✓

Problem 11

计算下列集合的基数.

(1) $A = \{x, y, z\}$

(2) $B = \{x | x = n^2 \wedge n \in N\}$

(3) $C = \{(x, y) | x, y \in N\}$

(4) 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合

(5) 复数集合

(1) $|A| = \mathrm{card}\, A = 3$

(2) 由于 n^2 与 $n \in \mathbb{N}$ 可以形成双射. 故 $B \approx \mathbb{N}$

$|B| = \aleph_0$.

(3) $l(x,y) = \sum_{i=1}^{m+n} i + m$. 故 $C \approx \mathbb{N}$.

$|C| = \aleph_0$.

(4) $D = \{$平面上所有圆心在x轴上的单位圆$\}$ 与 $r \in \mathbb{R}$ 可以形成双射. 故 $D \approx \mathbb{R}$.

$|D| = \aleph$.

(5) $E = \{x | x \in \mathbb{C}\}$. 对 $\forall x \in \mathbb{C}$ 其具有 $a + bi$ 的形式, $a, b \in \mathbb{R}$.

故 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 存在双射关系. 而 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 存在双射. 故 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}$ 存在双射.

故 $E \approx \mathbb{R}$. $|E| = \aleph$.

Problem 12

设 A,B 为可数集，证明：

(1) $A \cup B$ 是可数集;

(2) $A \times B$ 是可数集.

证明: (1) 设 $A \cap B = \varphi$.

若两集合均为有限集. 则设 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ $B = \{b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}\}$.

$|A \cup B| = n + m \leq \aleph_0$

若其中一个为有限集, 另一个为无限集, 则设 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$, $|B| = \aleph_0$

构造双射 $\varphi: A \cup B \to \mathbb{N}$. 当 $x \in A$ 时, $x = a_i$, $\varphi(x) = i$. $(i = 0, \cdots, n-1)$

当 $x \in B$ 时, $x = b_j$, $\varphi(x) = j + n$ $(j = 0, 1, \cdots)$

若两个均为无限集, 即 $|A| = |B| = \aleph_0$

存在双射 $f: A \to \mathbb{N}$. $g: B \to \mathbb{N}$. 故构造双射 $\psi: A \cup B \to \mathbb{N}$.

$$\psi(x) = \begin{cases} 2i & x \in A \text{ 且 } f(x) = i \\ 2j+1 & x \in B \text{ 且 } g(x) = j. \end{cases}$$

综上, $|A \cup B| \leq \aleph_0$ 是可数集

(2) 若两集合均为有限集. 则设 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ $B = \{b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}\}$.

$|A \times B| = nm \leq \aleph_0$

若其中一个为有限集, 另一个为无限集, 则设 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$, $|B| = \aleph_0$

构造双射 $\varphi: A \times B \to \mathbb{N}$. $\boxed{\varphi(\langle a_i, b_j \rangle) = i + jn.}$ 没想出来,借鉴了一下

若两个均为无限集, 即 $|A| = |B| = \aleph_0$

存在双射 $f: A \to \mathbb{N}$. $g: B \to \mathbb{N}$. 故构造双射 $\psi: A \times B \to \mathbb{N}$. (参考 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的双射构造)

$$\psi(x, y) = \sum_{k=1}^{i+j} k + i = \frac{(i+j+1)(i+j)}{2} + i \quad \text{其中 } f(x) = i,\ g(y) = j.$$

综上, $|A \times B| \leq \aleph_0$ 是可数集

Problem 13

确定下列各集合是否是有限的、可数无限的或不可数的。对那些可数无限集合，给出在自然数集合和该集合之间的一一对应。

a) 大于 10 的整数　可数无限

b) 奇负整数　可数无限

c) 绝对值小于 1 000 000 的整数　有限

d) 0 和 2 之间的实数　不可数

e) 集合 $A \times Z^+$ 这里 $A = \{2,3\}$　可数无限

f) 10 的整数倍　可数无限

a) $A = \{x \mid x > 10, x \in \mathbb{Z}\}$.

存在 $f: y = x - 11$ 使 $f(A) \to \mathbb{N}$.

b) $B = \{x \mid x = -2k-1, k \in \mathbb{N}\}$.

存在 $f: y = \frac{x+1}{-2}$ 使 $f(B) \to \mathbb{N}$.

e) $C = \{A \times \mathbb{Z}^+\}$ $A = \{2,3\}$

对 $x \in C$，存在 $f: \begin{cases} y = x - 2, & A = 2, k \in \mathbb{N} \\ y = \frac{2}{3}x - 1, & A = 3, k \in \mathbb{N} \end{cases}$

使 $f(C) \to \mathbb{N}$.

f) $D = \{x \mid x = 10^k, k \in \mathbb{Z}\}$.

对 $x \in D$，存在 $f: \begin{cases} y = -2\log_{10} x - 1, & k < 0 \\ y = 2\log_{10} x, & k \geq 0 \end{cases}$

使 $f(D) \to \mathbb{N}$.

Problem 14

设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{0,1\}^A$，由定义证明 $\mathcal{P}(A) \approx \{0,1\}^A$.

$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

$B = \{0,1\}^A = \{f_0, f_1, \cdots, f_7\}$.

$f_0 = \{(a,0),(b,0),(c,0)\}$　$f_1 = \{(a,1),(b,0),(c,0)\}$　$f_2 = \{(a,0),(b,1),(c,0)\}$　$f_3 = \{(a,0),(b,0),(c,1)\}$.

$f_4 = \{(a,1),(b,1),(c,0)\}$　$f_5 = \{(a,1),(b,0),(c,1)\}$　$f_6 = \{(a,0),(b,1),(c,1)\}$　$f_7 = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$.

构造双射　$f(\phi) = f_0$　$f(\{a\}) = f_1$　$f(\{b\}) = f_2$　$f(\{c\}) = f_3$

$f(\{a,b\}) = f_4$　$f(\{a,c\}) = f_5$　$f(\{b,c\}) = f_6$　$f(\{a,b,c\}) = f_7$.

则 $P(A) = \{0,1\}^A$.

Problem 15

令 $\{1,2,3\}^\omega$ 为所有仅由数字 1, 2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。

设所有 1,2,3 序列所组成的集合 S 为可数集．f 为任一枚举函数．

有
$f(0)$　$x_{00}, x_{01}, x_{02}, \cdots$
$f(1)$　$x_{10}, x_{11}, x_{12}, \cdots$
$\cdots$　$\cdots$
$f(n)$　$x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \cdots$
$\cdots$

其中 x_{nj} $(n, j = 0, 1, 2, \cdots)$ 为 1 或 2 或 3．现构造 1,2,3 序列 $y = y_0, y_1, y_2, \cdots$ 使得

$$y_i = \begin{cases} 1 & x_{ii} = 2 \\ 2 & x_{ii} = 3 \\ 3 & x_{ii} = 1 \end{cases} \quad \left(\text{或} \quad y_i = \begin{cases} 1 & x_{ii} = 3 \\ 2 & x_{ii} = 1 \\ 3 & x_{ii} = 2 \end{cases} \right)$$

则 y_i 是 1,2,3 序列．且对于任一 n，$y \neq f(n)$．至少 $y_n \neq x_{nn}$.

则 f 不是满射．矛盾．

故 S 无枚举函数，S 不可数．

Problem 16

计算:

a) 23300 mod 11

b) 2^{3300} mod 31

c) 3^{516} mod 7

a) 23300 mod 11

$= 7$

b) $2^{3300} \bmod 31$

$= 2^{30\times110} \bmod 31 \quad (2^{30} \equiv 1 \bmod 31)$

$= 1$

c) $3^{516} \bmod 7$

$= 3^{6\times86} \bmod 7 \quad (3^{6} \equiv 1 \bmod 7)$

$= 1$

Problem 17

证明：对于任意的整数 n，$\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ 是整数。

即证 $15 \mid 3n^5+5n^3+7n$.

只需证 $3 \mid 5n^3+7n$ 且 $5 \mid 3n^5+7n$

证 $3 \mid 5n^3+7n$.

又 $y=5n^3+7n$ 是奇函数. 故证 $n\geq0$ 即可.

当 $n=0$ 时, $3 \mid 0$ 成立.

假设 $n=k$ 时, 有 $3 \mid 5k^3+7k$.

当 $n=k+1$ 时, $5(k+1)^3+7(k+1)=(5k^3+7k)+3(5k^2+5k+4)$.

故 $3 \mid (5k^3+7k)+3(5k^2+5k+4)$.

故 $n=k+1$ 时成立

故 $3 \mid 5n^3+7n$ 成立.

同理 $5 \mid 3n^5+7n$ 也成立.

故 $15 \mid 3n^5+5n^3+7n$ 成立. 原命题得证.

Problem 18

借助于费马小定理证明如果 n 是一个正整数，则 42 能整除 n^7-n。

$42=2\times3\times7$

由 $n^2\equiv n \bmod 2$. 有 $n^7\equiv n \bmod 2$. 有 $n^7-n\equiv 0 \bmod 2$.

由 $n^3\equiv n \bmod 3$. 有 $n^7\equiv n \bmod 3$ 有 $n^7-n\equiv 0 \bmod 3$.

由 $n^7\equiv n \bmod 7$ 有 $n^7-n\equiv 0 \bmod 7$.

故 n^7-n 含有素因子 2, 3, 7.

即 $42\mid n^7-n$.

Problem 19

试证明: 若 $p\geq 7$ 为质数，则 $240\mid(p^4-1)$。

$p^5\equiv p \bmod 5$, 故 $p^5-p=p(p^4-1)\equiv 0 \bmod 5$.

又 p 为质数，故 $p^4-1\equiv 0 \bmod 5$.

$p\geq 7$. 则 $p-1$, $p+1$, p^2+1 都是偶数，且 $p-1$, $p+1$ 相邻偶数,

$p^4-1=(p+1)(p-1)(p^2+1)$ 能被 $2\times2\times2^2=16$ 整除.

又 p 为不小于 7 的质数. 设 $k\in\mathbb{Z}^+$.

若 $p=3k+1$, 则 $3\mid p-1$.

若 $p=3k+2$, 则 $3\mid p+1$.

故均有 $3\mid(p^4-1)$.

故 p^4-1 含因子 5, 16, 3.

故 $240\mid p^4-1$

Problem 20

证明：若 m 和 n 互质，则 $m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}\equiv 1 \pmod{mn}$.

由欧拉定理 $m^{\phi(n)}\equiv 1 \bmod n$ $\quad n^{\phi(m)}\equiv 1 \bmod m$

有 $n\mid m^{\phi(n)}-1$ $\quad m\mid n^{\phi(m)}-1$.

即 $mn\mid(m^{\phi(n)}-1)(n^{\phi(m)}-1)$

$mn\mid m^{\phi(n)}n^{\phi(m)}-(m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}-1)$

由 $mn\mid m^{\phi(n)}n^{\phi(m)}$

有 $mn\mid m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}-1$

有 $m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}\equiv 1 \bmod mn$

《离散数学》第五周作业

归纳与递归，基本计数原理

Problem 1

下面的 " 证明” 错在哪儿? 证明: 所有的马都有相同的颜色。设 $P(n)$ 是命题 “n 匹马的集合中所有马都有相同的颜色”。

基础步骤: 显然 $P(1)$ 为真。归纳步骤: 假设 $P(k)$ 为真, 即 k 匹马的集合中所有马都有相同的颜色。考虑任意 $k+1$ 匹马, 将这些马编号为 $1,2,3,\ldots,k,k+1$。我们有前 K 匹马必具有相同的颜色, 而后 k 匹马也必具有相同的颜色。因为前 k 匹马的集合与后 k 匹马的集合是重叠的, 因此, 所有 k+1 匹马必有相同的颜色。这就证明了 $P(k+1)$ 为真, 归纳步骤证毕。

错在归纳步骤:

P(k)为真，有前k匹马具有相同颜色a.
后k匹马具有相同颜色b.
a与b是相互独立的情况，不能认为a.b是同一种情况下的同一种颜色.

Problem 2

问题: 给出下述集合的递归定义:

a) 正奇数集合.

b) 整系数多项式的集合.

c) 3 的正整数次幂的集合.

a) $1 \in A$.
若 $x \in A$，则 $x+2 \in A$.

b) 对一个多项式，其各项系数为1时属于集合B.
若一个多项式属于集合B，其任意n项的整数倍与多项式相加后仍属于集合B.

c) $3 \in C$.
若 $x \in C$，则 $3x \in C$

(排斥规则默认成立)

Problem 3

当 n 为非负整数时, 证明: $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ 可被 9 整除.

归纳奠基：当 $n=0$ 时，$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=9$ 故 $9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$
当 $n=1$ 时，$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=36$ 故 $9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$

归纳步骤：假设 $n=k$ 时成立，有 $9 \mid k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$.
当 $n=k+1$ 时，有 $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 = k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+9(k^2+3k+3)$ 被9整除

故由数学归纳法，原命题得证.

Problem 4

用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

归纳奠基：当 $n=1$ 时，平面分为 2 个区域，成立.

归纳步骤：假设当 $n=k$ 时，平面分为 $2k$ 个区域.

当 $n=k+1$ 时，第 $k+1$ 条线将 $2k$ 个区域中的 2 个再分为 4 个区域.

故共有 $2k+2=2(k+1)$ 个区域.

故由数学归纳法，原命题得证.

Problem 5

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式. 例如，$7=3+2+1+1$ 是 7 的拆分. 设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目，其中和式里项的顺序无关紧要，并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数.

a) 证明: $P_{m,m}=P_m$.

b) 证明: 下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的.

$$P_{m,n}=\begin{cases} 1 & m=1 \\ 1 & n=1 \\ P_{m,m} & m<n \\ 1+P_{m,m-1} & m=n>1 \\ P_{m,n-1}+P_{m-n,n} & m>n>1 \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数.

a) 由题知 $P_{m,m}\le P_m$. 要证 $P_{m,m}=P_m$，即证 $P_{m,m}\geqslant P_m$.

假设 P_m 中有拆分不在 $P_{m,m}$ 中，则拆分中至少含 $m+1>m$，则必含有负数. 与题设矛盾.

从而 P_m 中所有拆分在 $P_{m,m}$ 中. $P_{m,m}\geqslant P_m$.

故 $P_{m,m}=P_m$ 得证.

b) 当 $m=1$ 时，$1=1$ 有唯一拆分，$P_{m,n}=1$. 当 $n=1$ 时，有唯一拆分 $P_{m,1}=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m个}$，$P_{m,n}=1$

若 $m<n$. 对 m 拆分中有 $n>m$ 则必含负数，与题设矛盾. 从而 $P_{m,m}\geqslant P_{m,n}$. 又由 $n>m$. 有 $P_{m,n}\geqslant P_{m,m}$. 故 $P_{m,n}=P_{m,m}$.

若 $m=n>1$，由前有 $P_{m,n}=P_{m,m}=P_m$. $P_m\geqslant P_{m,m-1}$. 若只在 m 中划分，且均为正整数，则只有一种划分 $m=m$. 从而 $P_{m,n}=1+P_{m,m-1}$.

若 $m>n>1$. $P_{m,n}-P_{m,n-1}$ 是所有最大数为 n 的 m 排列. 由于至少含 1 个 n，故其等价于对 $m-n$ 作最大数不超过 n 的排列. 即 $P_{m-n,n}$.

而 $P_{m,n}-P_{m,n-1}=P_{m-n,n}$. 即 $P_{m,n}=P_{m,n-1}+P_{m-n,n}$.

c) $P_5=P_{5,5}=1+P_{5,4}=1+P_{5,3}+P_{1,4}=1+P_{5,2}+P_{3,2}+1=2+2P_{3,2}=3+2(P_{3,1}+P_{1,2})=7$

$P_6=P_{6,6}=1+P_{6,5}=1+P_{6,4}+P_{1,5}=2+P_{6,3}+P_{2,4}=2+P_{6,3}+P_{2,2}=2+P_{6,2}+P_{3,3}+1+P_{2,1}=4+P_{6,2}+P_{3,3}$

$=4+P_{6,1}+P_{4,2}+1+P_{3,2}=6+P_{4,1}+P_{2,2}+P_{3,1}+P_{1,2}=9+P_{2,2}=9+1+P_{2,1}=11$

Problem 6

证明：当 n 是正整数时，有 $f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_nf_{n+1}$，其中 f_n 是第 n 个斐波那契数。

归纳奠基：当 $n=1$ 时，$f_1^2=1=f_1f_2$. 成立.

归纳步骤：假设 $n=k$ 时成立，有 $f_1^2+f_2^2+\cdots+f_k^2=f_kf_{k+1}$.

当 $n=k+1$ 时，有 $f_1^2+f_2^2+\cdots+f_k^2+f_{k+1}^2=f_kf_{k+1}+f_{k+1}^2=f_{k+1}(f_k+f_{k+1})=f_{k+1}f_{k+2}$ 成立.

由数学归纳法，有原命题成立.

Problem 7

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.

设 $P(n)$: n 可以写成质数之积.

归纳奠基: $P(2)$ 为真, 2是质数, 可以写成自身的积.

归纳步骤: 假设对所有 $2 \le j \le k$ 的正整数 j, $P(j)$.

1° 若 $k+1$ 是质数, 则可以写成自身的积, $P(k+1)$ 成立.

2° 若 $k+1$ 不是质数, 则 $k+1 = ab$. 其中设 $2 \le a \le b < k+1$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

由假设, a, b 都可写成质数之积 (无论它们自身是质数). 故 $k+1$ 可写成质数之积

由数学归纳法, 命题得证.

下证分解唯一:

假设分解不唯一. 即 $\exists n$, $n = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_m^{s_m} = b_1^{t_1} b_2^{t_2} \cdots b_n^{t_n}$

对 $\forall a_i, b_j$ ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) 都是素数.

则有 $1 = \frac{n}{n} = \frac{a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_m^{s_m}}{b_1^{t_1} b_2^{t_2} \cdots b_n^{t_n}}$ 存在分子分母有不同的素数使分数无法约分. 故 $\frac{a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_m^{s_m}}{b_1^{t_1} b_2^{t_2} \cdots b_n^{t_n}} \ne 1$. 矛盾. 故分解唯一.

Problem 8

设 S 是一个正整数集合，定义如下:

基础步骤：$1 \in S$。

归纳步骤：如果 $n \in S$，则 $3n+2 \in S$ 且 $n^2 \in S$。

a) 证明如果 $n \in S$，则 $n \equiv 1 (mod\ 4)$。

b) 证明存在一个正整数 m，$m \equiv 1 (mod\ 4)$ 不属于 S。

a) 设 $n = 4k+1 \in S$, $k \in \mathbb{N}$.

$3n+2 = 12k+5 \in S$ $\quad$ $12k+5 \equiv 1 (mod 4)$.

$n^2 = (4k+1)^2 = 16k^2+4k+1 \in S$. $\quad$ $16k^2+4k+1 \equiv 1 (mod 4)$.

故由 $n = 4k+1$ 生成的序列均有 $n \equiv 1 (mod 4)$.

又 $k=0$ 时 $n = 1 \in S$ 为初始值.

b) 存在 $m = 9$, $m \equiv 1 (mod 4) \wedge m \notin S$.

若 $9 \in S$. 则 $3n+2 = 9 \vee n^2 = 9 \Rightarrow \frac{7}{3} \in S$, $3 \in S$, $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$. 矛盾. 故 $9 \notin S$.

Problem 9

某班有学生 60 人，其中有 38 人学习 PASCAL 语言，有 16 人学习 C 语言，有 21 人学习 COBOL 语言；有 3 个人这三种语言都学习，有 2 个人这三种语言都不学习，问仅学习两门语言的学生数是多少?

全集 U = {该班学生60人} $\quad$ A = {学习PASCAL的人} $\quad$ B = {学习C的人} $\quad$ C = {学习COBOL的人}

$\neg(A \cap B \cap C) = U - (|A|+|B|+|C|) + ((A\cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)) - (A \cap B \cap C)$.

故 $((A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)) = (38+16+21) + 3 + 2 - 60 = 20$

从而 $|A \cap B \cap \overline{C}| + |A \cap \overline{B} \cap C| + |\overline{A} \cap B \cap C| = ((A\cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)) - 3|A \cap B \cap C| = 20 - 3 \times 3 = 11$

Problem 10

长度为 $n(n>5)$ 且以 012 开始或以210 结尾的三进制串有多少个?

设有N个这样的三进制串

$$\underset{3个}{012}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{n-3个}\ \underset{n个}{} \qquad \underset{n个}{}\overbrace{\qquad\qquad}^{n-3个}\ \underset{3个}{210} \qquad \underset{3个}{012}\ \overbrace{\qquad\qquad}^{n-6个}\ \underset{3个}{210}$$

$$N=3^{n-3}+3^{n-3}-3^{n-6}$$

Problem 11

长度为 12 且不包含 "11" 子串的二进制串有多少个?

$$N=C_{12}^{0}+C_{12}^{1}+C_{11}^{2}+C_{10}^{3}+C_{9}^{4}+C_{8}^{5}+C_{7}^{6}=377$$

Problem 12

从 1000 到 9999 之间, 包含多少个正整数

a) 被 9 整除?

b) 被 5 或 7 整除?

c) 是偶数?

d) 不被 5 也不被 7 整除?

e) 有不同的十进制数字?

f) 被 5 整除但不被 7 整除?

g) 不被 3 整除?

h) 被 5 和 7 整除?

a) $999\div 9=111$

$9999\div 9=1111$

$N=1111-111=1000$

b) $1000\div 5=200$

$10000\div 5=2000$

$N_1=2000-200=1800$

$1001\div 7=143$

$10003\div 7=1429$

$N_2=1429-143=1286$

$1020\div 35=29$

$10025\div 35=285$

$N_3=285-29=25\cancel{6}7$

$N=N_1+N_2-N_3=2829$

c) $N=\dfrac{9999-1000+1}{2}=4500$

d) $N=9000-2829=617\cancel{0}1$

e) $N=9\times 9\times 8\times 7=4536$

没看懂题, 理解为4位各不相同

f) $N=1800-25\cancel{6}7=154\cancel{4}3$

g) $999\div 3=333$

$9999\div 3=3333$

$N_1=3333-333=3000$

$N=9000-3000=6000$

h) $N=25\cancel{6}7$

0 **Problem 13**

设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 和 x_6 是正整数, 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 32$ 有多少个解?

0|0 0 0 0|0 0|0 0 0 0|0 0 0|0 0 0 0 0 0 0|0 0 0 0 0 0 0 0 0 0| 31个 ×

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 余项

$N = \cancel{C_{30}^{6}} = 593775$

C_{31}^{6}

Problem 14

由一个正 n 边形的顶点构成的三角形有多少个? 如果正 n 边形的边不能是构成三角形的边, 这样的三角形又有多少个?

$N_1 = C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$N_2 = C_n^3 - C_n^1 C_{n-4}^1 - C_n^1 = \dfrac{n(n-4)(n-5)}{6}$

Problem 15

给出关于 $\sum_{k=1}^{n} k * C(n,k) = n * 2^{n-1}$ 的组合证明。

由二项式定理, $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$.

求导, 有 $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}$.

令 $x=1$ $n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$

$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k$.

0 **Problem 16**

考虑一个 $N \times N$ 网格, 其中的每一个单元格可以取值 $+1$ 或 -1。我们称这种网格为二进制网格 *(Binary grid)*。任何行的行乘积 *(row product)* 都被定义为该单行中所有元素的乘积。同样, 一列的列乘积 *(column product)* 被定义为该单个列中所有元素的乘积。如果 N 行的行乘积中, 有且只有一个结果为 -1, 而 N 列的列乘积中, 有且只有一个结果为 -1, 则该 $N \times N$ 的二元网格称为魔术网格。换句话说, 魔术网格要求其他 $N-1$ 个行乘积全部为 $+1$, 其他 $N-1$ 个列乘积应也全部为 $+1$。试计算所有 $N \times N$ 的网格中, 魔术网格的数量。

一行应有奇数个 -1, 其余行均有偶数个 -1.

N 为奇数

行满足: $N_1 = C_n^1 (C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots + C_n^{n-1})^{n-1} + C_n^3 \cdots$

$N_1 = \left(\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m+1}\right) \cdot (2^{n-1})^{n-1}$

card $(A) = N_1$

N 为偶数

行满足 $N_3 = C_n^1 (C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^n)^{n-1} + C_n^3 \cdots$

$= \left(\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} C_n^{2m+1}\right)(2^{n-1})^{n-1}$.

card $(C) = N_3 =$ card (D)

数量为 card $(C \cap B)$

同理，列满足：$N_2 = \left(\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2m+1}\right)(2^{n-1})^{n-1}$.

$card(B) = N_2$

数量为两者的交集，$card(A \cap B)$

实在是求不出来了.

考虑递归的方法.

设 $f(N)$ 代表 $N \times N$ 的魔术网格数量.

$f(N)$ 在 $f(N-1)$ 基础上增加了一行一列，只需在此放置 -1 即可.

选择一个之前行列乘积都为 1 的位置放置 -1. 有 2^{N-1} 种.

故 $f(N) = 2^{(N-1)} \cdot f(N-1)$

$f(1) = 1$.

《离散数学》第六周作业

排列组合与离散概率

记号：A_n^m：从n个元素中取出m个进行排列

C_n^m 从n个元素中取出m个进行组合

Problem 1

由 m个 A和 n个 B构成序列, 其中 m,n 为正整数, $m \leq n$. 如果要求每个 A后面至少紧跟一个 B , 问：有多少个不同的序列.

m个A与m个B捆绑, 再与 n-m个B排列

$N = C_n^m = \frac{(n-m+1)!}{m!}$ $\frac{n!}{m!(n-m)!}$

$C(n,m)$

Problem 2

将 20 个相同的小球放入 3 个带有编号的盒子中, 第一个盒子至少有 2 个球且最后一个盒子不超过 10 个球一共有多少种放置的方法?

$N = C_{19}^1 C_1^1 = 190.$

Problem 3

用 3 个 1, 2 个 2, 5 个 3, 这十个数字能构成多少个能被 2 整除的四位数?

1° 除个位外只含一个数字.

_ _ _ 2

$N_1 = 2$

2° 除个位外有两个数字

$N_2 = C_3^1 C_2^1 + 2C_3^1 = 12$

(含2) (不含2)

3° 含3个数字

$N_3 = A_3^3 = 6$

$N = N_1 + N_2 + N_3 = 20$

Q

Problem 4

如果有 8 种不同的课程可供选择, 每个学生必须选择 5 门课程来完成他/她的学习计划. 那么最少有多少名学生, 使得不管他们如何选择, 至少有 10 名学生的学习计划相同?

完全不同的选择方案 $N_1 = C_8^5 = 56$

由鸽巢原理，要有10个学生相同，则 $N = N_1 + 10 = 66$. (两两相同，并非10个相同).

$N = 56 \times 9 + 1$

56个鸽巢，每个放9个，加1.

Problem 5

集合 $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, 证明: 如果从集合 A 中随机选择 7 个数，那么总能找到其中的 2 个数相加为 15.

集合A的六个子集：$\{2,13\}$ $\{3,12\}$ $\{4,11\}$ $\{5,10\}$ $\{6,9\}$ $\{7,8\}$.

由鸽巢原理，若选出7个数则必有2个数来自上述的同一集合.

而同一集合元素之和为15.

故得证

Problem 6

计算 $(x + 2y - 4z)^6$ 的展开式中, x^3y^2z 项的系数.

$N = C_6^3 \times 2^2 C_3^1 \times (-4) = -960$

Problem 7

使用鸽笼原理证明任何的有理数可以表示为一个整数加上一个有限或循环小数.

对任一有理数 $\frac{a}{b}$，$(a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0)$，有

$\frac{a}{b}=k_0+\frac{a_0}{b}$，$k_0\in\mathbb{Z}$、$0\le a_0<b$.

$\frac{a_0}{b}=\frac{1}{10}\cdot\frac{10a_0}{b}=\frac{1}{10}(k_1+\frac{a_1}{b})$ $0\le a_1<b$. $k_1\in\mathbb{Z}$.

综上，$\frac{a}{b}=k_0+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}\cdot\frac{a_n}{b}$.

一个数除以 b 所得余数为 $0\sim b-1$.

若 $\frac{a_i}{b}=0$，则 $\frac{a}{b}$ 为有限小数.

若 $\frac{a_i}{b}\neq 0$，则 1° 若 $k_j=k_i$，$j<i$，则得到循环小数.

2° 若 $k_j\neq k_i$，则继续展开，由鸽巢原理，

最多 b 步取遍余数 $0\sim b-1$，$b+1$ 步必得存在 $i\in[1,b]$，$k_{b+1}=k_i$.

则得到循环小数.

Problem 8

设 E_1 和 E_2 是两个事件, 如果 $P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\times P(E_2)$，就称 E_1 和 E_2 是独立的. 如果把一枚硬币被抛掷 3 次时所有可能的结果构成一个集合, 把这个集合的子集看做事件, 确定下面的每一对事件是否是独立的.

a) E_1: 第一次硬币头像向下; E_2: 第二次硬币头像向上.

b) E_1: 第一次硬币头像向下; E_2: 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.

c) E_1: 第二次硬币头像向下; E_2: 在连续 3 次中有 2 次但不是 3 次头像向上.

a) $P(E_1)=\frac{1}{2}$ $P(E_2)=\frac{1}{2}$ $P(E_1\cap E_2)=P(E_1)\times P(E_2)=\frac{1}{4}$. 是独立事件.

b) $P(E_1)=\frac{1}{2}$ $P(E_2)=\frac{1}{8}\times 3=\frac{3}{8}$ $P(E_1\cap E_2)\neq P(E_1)\times P(E_2)=\frac{1}{8}$ 不是独立事件.

c) $P(E_1)=\frac{1}{2}$ $P(E_2)=\frac{1}{4}$ $P(E_1\cap E_2)=0\neq P(E_1)\times P(E_2)$ 不是独立事件.

Problem 9

设 p 和 q 是素数且 $n=pq$。随机选择小于 n 的正整数，该正整数不被 p 或 q 整除的概率是多少?

设该正整数不被 p 或 q 整除为事件 A.

$$P(\bar{A})=\frac{(p-1)+(q-1)}{n-1}=\frac{p+q-2}{n-1}=\frac{p+q-2}{pq-1}$$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=\frac{n+1-(p+q)}{n-1}$$

Problem 10

设离散型随机变量 $X \in \{1,2,3\}, Y \in \{1,2,3\}$ 的联合概率 $P(X \cap Y)$ 分布为:

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
Pr	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

若 X, Y 相互独立, 求 a, b.

$P(1,2) = P_X(1) \cdot P_Y(2)$，有 $\frac{1}{9} = (\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}) \times (\frac{1}{9} \times a) \Rightarrow a = \frac{2}{9}$

$b = 1 - P(2,3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} - \frac{1}{18} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$.

故 $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{1}{9}$

Problem 11

随机产生 3 位比特串，设 E 是这个串含有奇数个 1 的事件，F 是这个串以 1 开始的事件。E 和 F 是独立的吗?

$P(E) = \frac{3+1}{2^3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(F) = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$

$P(E \cap F) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

故 $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.

E与F是独立的

0

Problem 12

假如某诊所对病人的检测中有 4% 的人感染了禽流感病毒。此外，假定对给定的禽流感血液检测 (检测结果为阳性不等价于感染病毒, 即感染了禽流感的人也可能呈阴性, 没有感染的人也可能呈阳性), 感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性, 没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性. 那么, 下列概率是多少?

a) 禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒.

b) 禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒.

c) 禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒.

d) 禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒.

设禽流感检测呈阳性为事件A，感染禽流感为事件B.

$P(B) = 0.04$ $\quad$ $P(A|B) = 0.97$ $\quad$ $P(A|\bar{B}) = 0.02$

$P(A) = P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) = 0.0568$

a) $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.97 \times 0.04}{0.0568} \doteq 0.6828$

b) $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{0.97 \times 0.04}{0.0568} \doteq 0.3172$

c) $P(B|\bar{A}) = \frac{P(B)(1-P(A|B))}{P(\bar{A})} = \frac{0.04 \times (1-0.97)}{1-0.0568} \doteq 0.0127$

d) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A}) = 1 - \frac{0.04 \times (1-0.97)}{1-0.0568} \doteq 0.9873$

Problem 13

当一个均匀的骰子被掷 10 次时，出现偶数点的次数的方差是多少?

设出现偶数点次数为随机变量 x.

$x \sim B(\frac{1}{2}, 10)$

$E(x) = np = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

$Var(x) = np(1-p) = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Problem 14

设 X和 Y是随机变量，并且对于样本空间 S的所有点，X和 Y是非负的。设 Z是如下定义的随机变量：对所有的元素 $s \in S, Z(s) = \max(X(s), Y(s))$。证明 $E(Z) \le E(X) + E(Y)$。

$Z(s) = max(X(s) + Y(s)) \le X(s) + Y(s)$

$E(Z(s)) \le E(X(s) + Y(s)) \le E(X(s)) + E(Y(s))$

即 $E(Z) \le E(X) + E(Y)$

Problem 15

某人爱说谎, 三句只能信两句. 他扔了一个骰子, 报告说是“四点”. 问这个骰子真是四点的概率是多少?

$p = \frac{2}{3}$.

Problem 16

假设现在有 100 个座位, 从 1 号到 100 号, 从其中随机选择 25 个座位, 所选的连续座位对的期望是多少?(譬如 $\{1, 2\}$ 就是一个连续座位对).

75个空座位形成76个间隙.

$$E = \frac{\sum_{k=1}^{24} C_{24}^{k} k C_{76}^{25-k}}{C_{100}^{25}} = 6$$